ΜΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

Καραμολέγκος Πρόδρομος, Εφέντη Ιάσων, Καραγκιοζίδης Νίκος, Μαγριώτης Αντώνης, Θεοχάρους Μαριάνθη Ελένη
Μαθητές Β΄ Λυκείου, 1^{ο} ΓΕΛ Ξάνθης
prokaramolegos@gmail.com, iasonpao13@hotmail.gr,
nick.kara4@yahoo.gr, ADWNHS19999@gmail.com,
marialena_theo99@hotmail.com

Περίληψη

Η ασαφής λογική, εμφανίζεται σχεδόν σε κάθε τομέα της ανθρώπινης δραστηριότητας. Ο αριθμός των εφαρμογών της είναι ολοένα αυξανόμενος, με τις περισσότερες να εντοπίζονται στις επιστήμες του μηχανικού. Η παρούσα εργασία αποτελείται από τρία μέρη. Στο πρώτο μέρος παρατίθεται μια συνοπτική ιστορική αναδρομή καθώς και η γενική φιλοσοφία της ασαφούς λογικής. Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζεται η μαθηματική θεμελίωση της ασαφούς λογικής και πιο συγκεκριμένα της ασαφούς αριθμητικής, με σκοπό την κατανόηση της επίλυσης ενός προβλήματος που ανάγεται σε πρωτοβάθμια εξίσωση με ασαφείς συντελεστές. Στο τρίτο μέρος παρουσιάζεται η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος.

Εισαγωγή

Η εργασία πραγματεύεται την ασαφή λογική, έναν σύγχρονο κλάδο των μαθηματικών, που έχει φέρει επανάσταση στο σχεδιασμό τεχνολογικών επιτευγμάτων. Η ασαφής λογική έχει πάρα πολλές εφαρμογές σε τεχνολογικά μοντέλα που προσομοιάζουν στην τεχνητή νοημοσύνη. Παράλληλα όμως, μπορεί να ερμηνεύσει πολλά φαινόμενα της καθημερινότητας.

Ιστορική Αναδρομή

Πριν την εμφάνιση της ασαφούς λογικής, το επικρατέστερο μοντέλο ήταν αυτό που θεμελίωσε ο Αριστοτέλης, το οποίο ασπαζόταν την αρχή "της του Τρίτου Αποκλίσεως", σύμφωνα με την οποία, αν μια πρόταση δεν είναι ψευδής, τότε είναι αναγκαστικά αληθής. Αυτή η δίτιμη λογική ονομάζεται και "Αριστοτέλεια" προς τιμήν του. Βέβαια, η ιδέα της του Τρίτου Αποκλίσεως δεν έγινε αποδεκτή από όλους. Ο Πλάτωνας αναφέρει και μια τρίτη περίπτωση μεταξύ του ψευδούς και του αληθούς, εισάγοντας έτσι μια τρίτιμη λογική. Το 19ο αιώνα μ.Χ ο George Boole συνδύασε τη θεωρία των συνόλων με την άλγεβρα, αντιστοιχίζοντας τις έννοιες "αληθής" και "ψευδής" στο 1 και 0 αντίστοιχα.

Η ασαφής λογική εισήχθη το 1965 από τον Πέρση-Ρώσο- Αμερικάνο Lofti Zadeh από το Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, ο οποίος παρουσίασε την εργασία του "Fuzzy Sets" στο περιοδικό Information and Control, στο οποίο ήταν εκδότης. Η εργασία είχε ολοκληρωθεί 2 χρόνια πριν και ο Zadeh την είχε στείλει σε διάφορα επιστημονικά περιοδικά, κανένα όμως δεν την έκανε δεκτή εξαιτίας των πρωτοποριακών ιδεών που περιείχε. Ο Zadeh συνειδητοποίησε ότι οι Υπολογιστές που βασίζονταν στη συμβατική λογική αδυνατούσαν να επεξεργαστούν δεδομένα που εκφράζονταν σε γλώσσα που προσέγγιζε τη φυσική, καθώς ήταν δομημένοι με βάση τη δίτιμη λογική του Boole (0 και 1). Όμως αυτό το λαμπρό οικοδόμημα (ο Υπολογιστής) δεν μπορούσε να απεικονίσει με ακρίβεια την πραγματικότητα, στην οποία συναντάμε “άπειρες αποχρώσεις του γκρι μεταξύ του μαύρου και του άσπρου”. Έτσι, ο Zadeh δημιούργησε την ασαφή λογική, ώστε οι υπολογιστές να μπορούν να διαχειρίζονται γλωσσικές μεταβλητές (π.χ "αρκετά ψηλός") που προσεγγίζουν την πραγματικότητα.

Η πρωτοποριακή ιδέα εξακολούθησε για πολλά χρόνια να μην αποσπά το ενδιαφέρον των Δυτικών επιστημόνων και ερευνητών, πιθανότατα εξαιτίας του ονόματός της. Αντίθετα, είχε πολύ μεγάλη απήχηση σε Ασιατικές χώρες, (Ιαπωνία, Κίνα), ίσως εξαιτίας της κουλτούρας τους που αναφέρει ότι κάθε έννοια ανήκει μερικώς σε ένα σύνολο.

Σήμερα, η αξία της Ασαφούς Λογικής έχει αναγνωριστεί από το σύνολο της επιστημονικής κοινότητας, καθώς οι εφαρμογές της είναι ιδιαίτερα χρήσιμες και ο αριθμός τους ολοένα αυξανόμενος. Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η ασαφής λογική για τους μηχανικούς. Πλέον, η συντριπτική πλειοψηφία των σύγχρονων συσκευών (ηλεκτρικών ή μηχανικών) που σχεδιάζονται χρησιμοποιεί ασαφή κοντρόλερς (Fuzzy Logic Controllers-FCL).

Μαθηματική Θεμελίωση

Η ασαφής λογική αποτελεί επέκταση της κλασικής λογικής από το δίτιμο σύνολο {0,1} στο απειροσύνολο [0,1]. Έτσι, στην κλασική δίτιμη λογική μία πρόταση μπορεί να είναι είτε αληθής (1), είτε ψευδής (0), δηλαδή είτε μαύρο είτε άσπρο. Στην ασαφή λογική από την άλλη, μια πρόταση μπορεί να πάρει τις τιμές 1, (πλήρως αληθής), 0 (καθόλου αληθής), και κάθε ενδιάμεση τιμή του συνόλου [0,1]. Άρα στην ασαφή λογική δεν ισχύει η "αρχή της του Τρίτου Αποκλίσεως".

Ένα δίτιμο σύνολο ***A,*** ως προς σύνολο αναφοράς ***X***, μπορεί να παρασταθεί ισοδύναμα μέσω της ***χαρακτηριστικής συνάρτησής του*** $\boldsymbol{I_A}$, δηλαδή:

$$\boldsymbol{I}_A : \boldsymbol{X} \to \{0,1\}, \quad \text{με } \mathrm{I}_A(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \\ 0, & \text{αν } \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A} \end{cases}$$

Αντιθέτως, ένα ασαφές σύνολο **A,** ως προς σύνολο αναφοράς **X**, μπορεί να παρασταθεί μέσω της ***συνάρτησης συμμετοχής,*** δηλαδή:

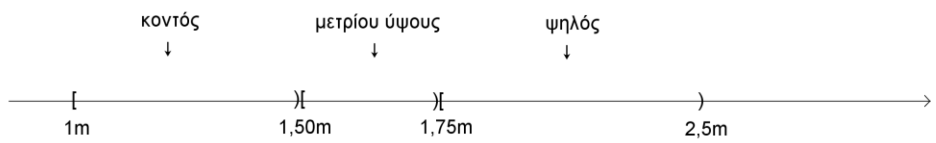
$$\mu_A : \boldsymbol{X} \to [0, 1], \quad \text{με } \mu_A(\boldsymbol{x}) = \alpha,\ \alpha \in [0, 1]$$

Ο αριθμός $\mu_A(x)$ δηλώνει το βαθμό συμμετοχής σύμφωνα με τον οποίο το στοιχείο x ανήκει (συμμετέχει) στο ασαφές σύνολο *A*.
Δηλαδή:
$\mu_A(x) =1$, σημαίνει ότι το x ανήκει ολοκληρωτικά στο A,
$\mu_A(x)=0$, σημαίνει ότι το x δεν ανήκει καθόλου στο A,
$0<\mu_A(x)<1$, σημαίνει ότι το x ανήκει μερικά δηλαδή κατά κάποιον βαθμό στο A.

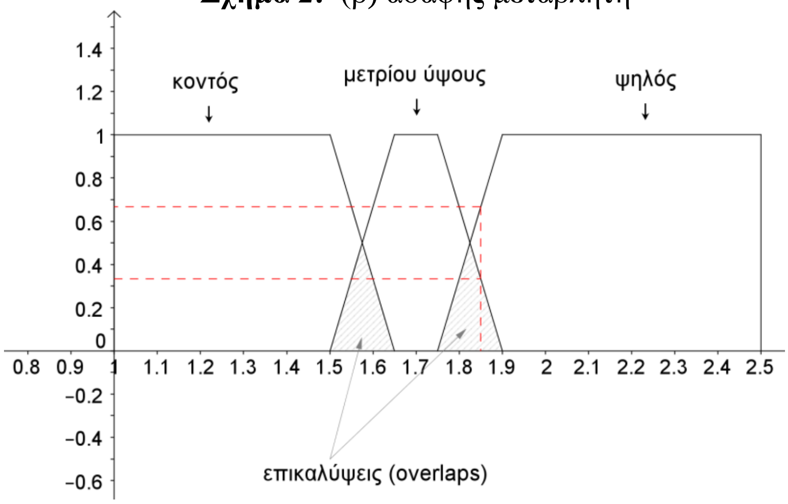
Σύγκριση ασαφούς και κλασικής μεταβλητής μέσω ασαφών και κλασικών συνόλων αντίστοιχα.

Θεωρούμε τη γλωσσική μεταβλητή «ύψος άντρα»: α) ως κλασική μεταβλητή β) ως ασαφή μεταβλητή.

Σχήμα 1: (α) κλασική μεταβλητή



Σχήμα 2: (β) ασαφής μεταβλητή



Σύμφωνα με την ασαφή λογική ένας άνδρας ύψους 185cm είναι κατά 0,33 (33%) μετρίου ύψους και 0,67 (67%) ψηλός, ενώ με τη δίτιμη λογική είναι μόνο ψηλός.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η Ασαφής Λογική μπορεί να εκφράζει την υποκειμενικότητα και την ασάφεια πολύ αποδοτικά μέσω των επικαλύψεων των γλωσσικών μεταβλητών (linguistic variables).

Ασαφείς αριθμοί.

Οι ασαφείς αριθμοί είναι ειδικά ασαφή σύνολα ως προς $\mathbb{R}$:

$\mu_A : \mathbb{R} \to [0, 1]$, με $\mu_A(x) = \alpha,\ \alpha \in [0, 1]$.

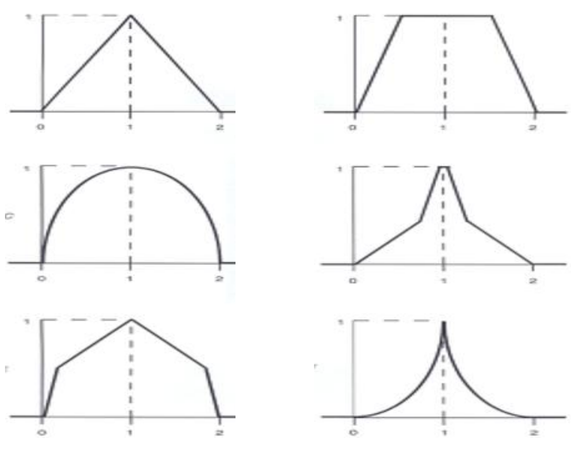
Υπάρχουν ορισμένοι περιορισμοί, για να είναι το ασαφές σύνολο *A* ασαφής αριθμός. Ο ορισμός του ασαφούς αριθμού υπερβαίνει το γνωστικό μας επίπεδο, ισχύει όμως το παρακάτω θεώρημα, το οποίο αντισταθμίζει την αδυναμία αναφοράς του ορισμού αυτού.

Θεώρημα 1 Ένα ασαφές σύνολο *A* ως προς $\mathbb{R}$ είναι ασαφής αριθμός, αν και μόνο αν υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta] \neq \varnothing$ τέτοιο ώστε

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\alpha, \beta] \\ l(x), & x \in (-\infty, \alpha) \\ r(x), & x \in (\beta, +\infty) \end{cases}$$

όπου l είναι συνάρτηση από το $(-\infty, \alpha)$ στο $[0,1]$, αύξουσα και συνεχής δεξιά, με $l(x)=0$ για $x \in (-\infty, \omega_1)$ και r είναι συνάρτηση από το $(\beta, +\infty)$ στο $[0,1]$, φθίνουσα και συνεχής αριστερά, με $r(x)=0$ για $x \in (\omega_2, +\infty)$.

Σχήμα 3: Διάφορες γραφικές παραστάσεις ασαφών αριθμών

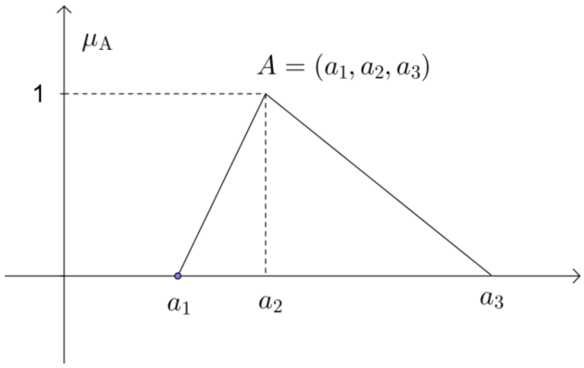


Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε τους τριγωνικούς ασαφείς αριθμούς, καθώς είναι απλοί και η χρήση τους σε εφαρμογές ασαφούς λογικής ευρέως διαδεδομένη. Οι τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί μπορούν να εκφραστούν πλήρως από μια τριάδα $A=(a_1, a_2, a_3)$, που προσδιορίζει την συνάρτηση συμμετοχής με τον εξής τρόπο:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}, & x \in [a_1, a_2] \\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2}, & x \in [a_2, a_3] \\ 0, & x < a_1 \text{ ή } x > a_3 \end{cases}$$

Ο τριγωνικός ασαφής αριθμός A φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Σχήμα 4: Τριγωνικός Ασαφής Αριθμός



α-cuts.

(α-cut) ενός ασαφούς συνόλου A (ως προς X) ονομάζεται το δίτιμο σύνολο, που ορίζεται ως εξής:

$$[\boldsymbol{A}]_a = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \ \ / \ \ \mu_A(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{a}\}, \text{ με } \alpha \in [0, 1].$$

Τα α-cuts ενός ασαφούς αριθμού είναι κλειστά διαστήματα. Για να εκτελέσουμε πράξεις ανάμεσα σε ασαφείς αριθμούς, πραγματοποιούμε τις αντίστοιχες πράξεις με τα α-cuts τους. Έτσι, οι πράξεις μεταξύ ασαφών αριθμών ανάγονται στις πράξεις των κλασικών διαστημάτων, που ορίζονται ως εξής:

Έστω τα διαστήματα $[\alpha, \beta]$, $[\gamma, \delta]$ με $0<\alpha\leq\beta$ και $0<\gamma\leq\delta$, τότε:

$[\alpha, \beta]+[\gamma, \delta]=[\alpha+\gamma, \beta+\delta]$, $\qquad [\alpha, \beta]-[\gamma, \delta]=[\alpha-\delta, \beta-\gamma]$

$[\alpha, \beta]\cdot[\gamma, \delta]=[\alpha\cdot\gamma, \beta\cdot\delta]$, $\qquad [\alpha, \beta]\div[\gamma, \delta]=\left[\dfrac{\alpha}{\delta}, \dfrac{\beta}{\gamma}\right]$.

Ασαφές Πρόβλημα.

Αέριο βρίσκεται σε δοχείο που κλείνεται με έμβολο και θερμαίνεται παράγοντας έργο $\boldsymbol{W} \simeq 202\boldsymbol{J}$. Αν κατά τη θέρμανσή του το αέριο απορρόφησε θερμότητα $\boldsymbol{Q} \simeq 709\boldsymbol{J}$, να υπολογιστεί η μεταβολή της εσωτερικής του ενέργειας.

Λύση

Από τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής γνωρίζουμε ότι $\boldsymbol{Q} = \Delta\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$. Ορίζουμε ως ασαφή αριθμό τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας: ΔU=X. Έστω ότι η θερμότητα προσδιορίζεται από τον τριγωνικό ασαφή αριθμό Q= (699, 709, 719) και το έργο από τον W=(197, 202, 207). Τότε:

$$\mu_Q(x)=\begin{cases}\dfrac{x-699}{10}, & x\in[699,\ 709]\\ \dfrac{719-x}{10}, & x\in[709,\ 719]\\ 0, & x<699 \text{ ή } x>719\end{cases} \quad \text{και} \quad \mu_W(x)=\begin{cases}\dfrac{x-197}{5}, & x\in[197,\ 202]\\ \dfrac{207-x}{5}, & x\in[202,\ 207]\\ 0, & x<197 \text{ ή } x>207\end{cases}$$

Βρίσκουμε τα α-cuts των ασαφών αριθμών Q και W με την ακόλουθη διαδικασία:

Για τον Q:

$\dfrac{x-699}{10}\ge a \Leftrightarrow x\ge 10a+699$ και $\dfrac{719-x}{10}\ge a \Leftrightarrow x\le 719-10a$

Άρα, $[Q]_a=[10a+699,\ 719-10a]$.

Για τον W:

$\dfrac{x-197}{5}\ge a \Leftrightarrow x\ge 5a+197$ και $\dfrac{207-x}{5}\ge a \Leftrightarrow x\le 207-5a$

Άρα, $[W]_a=[5a+197,\ 207-5a]$

Από την εξίσωση $Q=X+W$ έχουμε:

$[Q]_a=[X]_a+[W]_a \Leftrightarrow$

$[10a+699,\ 719-10a]_a=[l_X, r_X]+[5a+197,\ 207-5a]\Leftrightarrow$

$[10a+699,\ 719-10a]_a=[l_X+5a+197,\ r_X+207-5a]\Leftrightarrow$

$l_X+5a+197=10a+699$ και $r_X+207-5a=719-10\alpha \Leftrightarrow$

$l_X=5a+502$ και $r_X=512-5\alpha$

Άρα, $[X]_a=[5a+502,\ 512-5a]$

(πρέπει: $5a+502\le 512-5a \Leftrightarrow 10a\le 10 \Leftrightarrow a\le 1$ που ισχύει)

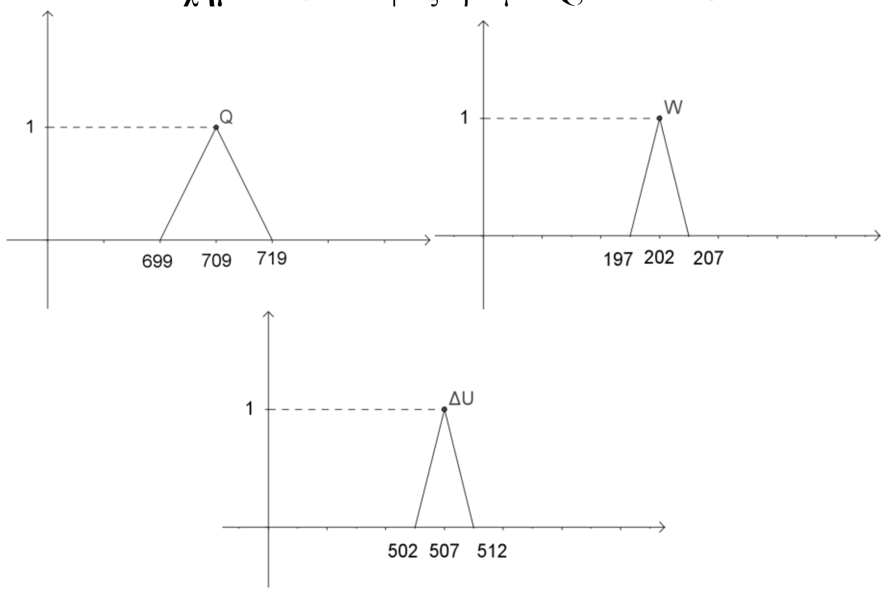
Βρίσκουμε τη συνάρτηση συμμετοχής του ασαφή αριθμού X.

$$\begin{cases}x\ge 5a+502\\ x\le 512-5a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x-502}{5}\ge a\\ \dfrac{512-x}{5}\ge a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le \dfrac{x-502}{5}\le 1 \Leftrightarrow 502\le x\le 507\\ 0\le \dfrac{512-x}{5}\le 1 \Leftrightarrow 507\le x\le 512\end{cases}.$$

$$\text{Άρα } \mu_x(x)=\begin{cases}\dfrac{x-502}{5}, & x\in[502,507]\\ \dfrac{512-x}{5}, & x\in[507,512]\\ 0, & x<502 \text{ ή } x>512\end{cases}$$

Η $\mu_X(\boldsymbol{x})$ είναι προφανώς συνάρτηση συμμετοχής τριγωνικού ασαφούς αριθμού. Αλλά και με τη χρήση του Θεωρήματος 1, αφού η $\frac{\boldsymbol{x}-502}{5}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, η $\frac{512-\boldsymbol{x}}{5}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής και $\mu_x(507)=1$, ο X=ΔU είναι ένας ασαφής αριθμός «περίπου 507».

Σχήμα 5: Οι ασαφείς αριθμοί Q, W και ΔU



Ευχαριστίες

Ιδιαίτερες ευχαριστίες απονέμονται στην κα. Στεφανίδου Γεσθημανή για την καθοδήγηση και την υποστήριξή της και στους γονείς μας για την ηθική συμπαράσταση.

Βιβλιογραφία

Παπαδόπουλος, Β. (2015). *ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ*. Ξάνθη: Εκδόσεις Σοφία.

Παπαδόπουλος, Β., & Τζιμόπουλος, Χ. (2013). Α*σαφής Λογική*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Papaschinopoulos, G. - Stefanidou, G. (2003). *Boundedness and asymptotic behavior of the solutions of a fuzzy difference equation*. Fuzzy Sets and Systems, 140(3), 523-539

Fuzzy Logic: An Introduction. (n.d.). Retrieved December 5, 2015, from https://www.youtube.com/watch?v=P8wY6mi1vV8

Klir, G., & Yuan, B. (1995). FUZZY SETS AND FUZZY LOGIC Theory and Applications. New Jersey: Prentice Hall PTR.